

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: شعبان 1442هـ

## التحويلات النقطية

Transformations ponctuelles

## تمرين 1

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  لاحقتيهما على الترتيب العددين المركبين  $z_A = 1$  و  $z_B = 2 + 2i$ .

1- عيّن  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$ ، صورة النقطة  $B$  بالانسحاب  $t$  الذي شعاعه  $\vec{U} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

2- عيّن  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$ ، صورة النقطة  $C$  بالتحاكي  $h$  الذي مركزه النقطة  $A$  ونسبته  $-3$ .

3- عيّن  $z_E$  لاحقة النقطة  $E$  صورة النقطة  $C$  بالدوران  $r$  الذي مركزه المبدأ  $O$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

4- أنشئ النقطة:  $A, B, C, D$  و  $E$ . وحدة الرسم  $1\text{cm}$ .

5- احسب  $\frac{z_E - z_B}{z_D - z_B}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $BDE$ .

|     |         |         |        |
|-----|---------|---------|--------|
| $i$ | $-2-2i$ | $-2+6i$ | $2-2i$ |
|-----|---------|---------|--------|

## تمرين 2

نعتبر التحويل النقطي  $T$  من المستوي الذي يرفق بالنقطة  $M$  لاحقتها  $z$  النقطة  $M'$  لاحقتها  $z'$  حيث:  $z' = iz + 3 - i$ .

1- عيّن طبيعة التحويل  $T$  وعناصره المميزة.

2- عيّن  $A'$  و  $B'$  صورتين النقطيتين  $A(1;3)$  و  $B(-1;1)$  على الترتيب بالتحويل  $T$ . استعمل المدور لإنشاء  $A'$  و  $B'$ .

3- ليكن  $(\Delta)$  مستقيم معادلته:  $y = x + 2$ . اكتب معادلة المستقيم  $(\Delta')$  صورة المستقيم  $(\Delta)$  بواسطة التحويل  $T$ .

4- عيّن  $(\mathcal{C}')$  صورة الدائرة  $(\mathcal{C})$  التي قطرها  $[AB]$ ، بواسطة التحويل  $T$ . أنشئ  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$ ،  $(\mathcal{C})$  و  $(\mathcal{C}')$ .

|                                 |            |                                 |
|---------------------------------|------------|---------------------------------|
| $R = \sqrt{2}$ ; $\omega(1;-1)$ | $y' = -x'$ | $\frac{\pi}{2}$ ; $\Omega(2;1)$ |
|---------------------------------|------------|---------------------------------|

## تمرين 3

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . لتكن  $A, B$  و  $C$  النقط التي لواحقها على الترتيب  $2i$ ،  $1+3i$ .

1- نعتبر التحويل  $T$  الذي مركزه  $B$  ويحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $C$ . عيّن العبارة المركبة لهذا التحويل وعناصره المميزة ثم بيّن أن النقطة:  $A, B$  و  $C$  على استقامة واحدة.

2- عيّن مركز وزاوية الدوران  $r$  حيث  $r(A) = O$  و  $r(O) = B$ .

|                                   |                           |
|-----------------------------------|---------------------------|
| $\frac{\pi}{2}$ ; $\Omega(-1; 1)$ | $z' = -\frac{1}{2}z + 3i$ |
|-----------------------------------|---------------------------|

## تمرين 4 بكالوريا بتصرف

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة  $z^3 - 8 = 0$ .

2- نعتبر في هذا المستوي النقط  $A, B$  و  $C$  لواحقها على الترتيب:  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ،  $z_B = 2$  و  $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ . اكتب  $z_A$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي. عيّن طبيعة  $ABC$ .

3- نعتبر التحويل  $f$  من المستوي الذي يرفق بالنقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ .

(أ) عيّن الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة للتحويل  $f$ .

(ب) عيّن صورتين النقطيتين  $A$  و  $C$  بواسطة التحويل  $f$ . استنتج صورة المستقيم  $(AC)$  بواسطة التحويل  $f$ .

(ج) لتكن  $z_D = (\sqrt{3} + 1)z_C$ . عيّن  $z_E$  لاحقة  $E$  حتى تكون  $D$  صورة  $E$  بالتحويل  $f$ . عيّن طبيعة المثلث  $BDE$ .

|                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| $z_E = (\sqrt{3} + 1)z_A$ | $f(C) = B$ و $f(A) = C$ |
|---------------------------|-------------------------|

## تمرين 5 بكالوريا

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  حيث الوحدة  $1\text{cm}$ .

1- من أجل  $\Omega \neq M$ ، ندكر أن النقطة  $M'$  هي صورة النقطة  $M$  بالدوران  $r$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\theta$  إذا وفقط إذا:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(أ) لتكن  $z, z'$  و  $\omega$  لواحق النقط  $M, M'$  و  $\Omega$  على الترتيب. ترجم (1) و (2) بعبارتي الطويلة والعمدة.

(ب) استنتج عبارة  $z'$  بدلالة  $z, \theta$  و  $\omega$ .

2- حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$ .

3- لتكن النقطتان  $A$  و  $B$  لاحقتاهما على الترتيب  $a = 2\sqrt{3} - 2i$  و  $b = 2\sqrt{3} + 2i$ .

(أ) اكتب العددين  $a$  و  $b$  على الشكل الأسّي.

(ب) بيّن أن  $OAB$  مثلث متساوي الأضلاع ثم مثله.

4- لتكن  $C$  نقطة لاحقتها  $-8i = c$  و  $D$  صورتها بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ . مثل النقطتين  $C$  و  $D$ .

بيّن أن لاحقة النقطة  $D$  هي  $d = 4\sqrt{3} + 4i$ .

5- بيّن أن  $D$  هي صورة النقطة  $B$  بالتحاكي الذي مركزه  $O$  ويطلب تحديد نسبته.

6- بيّن أن  $OAD$  مثلث قائم.

## تمرين 8

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، (وحدة الرسم 1cm). لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب:  $z_A = 3 - i$  و  $z_B = 4 - 3i$ . نعتبر التطبيق  $f$  من هذا المستوي الذي يرفق بكل نقطة M تختلف عن A لاحقتها z النقطة M' لاحقتها  $z'$  حيث:  $z' = \frac{z - 4 + 3i}{iz - 1 - 3i}$ .

- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة  $z' = -iz - 1$ .
- 2- أعط تفسيرا هندسيا لطويلة العدد المركب  $z'$ ، ثم عيّن وأنشئ المجموعة  $(E_1)$  للنقط M بحيث  $|z'| = 1$ .
- 3- (أ) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب  $z'$ .
- (ب) عيّن وأنشئ المجموعة  $(E_2)$  للنقط M حتى يكون  $z'$  حقيقيا ثم المجموعة  $(E_3)$  للنقط M حتى يكون  $z'$  تخيليا صرفا.
- 4- لتكن النقطة C صورة B بالتشابه المباشر s الذي مركزه A، نسبته 2 وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ . (أ) بيّن أن  $z_C = -1 - 3i$ .
- (ب) عيّن وأنشئ صورة المجموعة  $(E_1)$  بالتشابه المباشر s.

|                 |             |                    |                 |
|-----------------|-------------|--------------------|-----------------|
| $2 - i ; 2 + i$ | محور $[AB]$ | دائرة قطرها $[AB]$ | المستقيم $(AB)$ |
|-----------------|-------------|--------------------|-----------------|

## تمرين 9

في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين  $A_0$  و  $A_1$ ، لاحقتيهما على الترتيب:  $z_0 = 8$  و  $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ .

1- (أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر s الذي مركزه O ويُحوّل النقطة  $A_0$  إلى النقطة  $A_1$ .

- (ب) عيّن النسبة والزاوية لهذا التشابه المباشر s.
- 2- من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، لتكن النقطة  $A_n$  لاحقتها العدد المركب  $z_n$  حيث:  $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$ .  $A_{n+1} = s(A_n)$ .
- ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، نضع  $u_n = |z_n|$ .
- (أ) بيّن أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

- (ب) اكتب عبارة  $OA_n$  بدلالة  $n$ ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n$ .
- (ج) من أجل كل  $n$ ، نضع:  $L_n = OA_0 + OA_1 + \dots + OA_n$ .
- احسب بدلالة  $n$  المجموع  $L_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$ .
- 3- (أ) بيّن أن  $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i\sqrt{3}$ ، وذلك من أجل كل عدد طبيعي  $n$ . استنتج طبيعة المثلث  $OA_n A_{n+1}$ .
- (ب) مثل  $A_0$  و  $A_1$  واستنتج تمثيل  $A_2$ ،  $A_3$  و  $A_4$  مبرزا الكيفية.

|                                     |                           |                                |
|-------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| $L_n = 16[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]$ | $OA_n = 8(\frac{1}{2})^n$ | $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z$ |
|-------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|

## تمرين 6

بكالوريا بتصرف

المستوي مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . لتكن النقطة A لاحقتها  $z_A = 2i$  والنقطة B لاحقتها  $z_B = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ .

1- ليكن الدوران الذي مركزه O وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ . نسمي C صورة B بالتحويل r. (أ) اكتب العبارة المركبة للتحويل r.

- (ب) بيّن أن لاحقة النقطة C هي  $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .
- (ج) اكتب العددين المركبين  $z_C$  و  $z_B$  على الشكل الجبري.
- 2- لتكن D مرجح الجملة:  $\{(A, 2); (B, -1); (C, 2)\}$ .
- (أ) احسب  $z_D$  لاحقة النقطة D.
- (ب) أنشئ النقط A، B، C و D، ثم بيّن أنها تنتمي لنفس الدائرة  $(\mathcal{C})$ . عيّن وأنشئ صورة  $(\mathcal{C})$  بواسطة التحويل r.
- 3- (أ) عيّن  $z_E$  لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{OD}$ . ما طبيعة الرباعي DOCE.

- (ب) احسب النسبة  $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$ ، ثم استنتج أن النقطة E هي صورة النقطة D بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.
- (ج) تأكد أن النقط A، D و E على استقامة واحدة.
- 4- عيّن ثم أنشئ المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M(z)$  من المستوي التي تحقق:  $|iz + 2| = |z - 2\sqrt{3}|$ .

|                   |                      |                      |                       |             |
|-------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------|
| $z_E = 2\sqrt{3}$ | $z_D = \sqrt{3} + i$ | $z_C = \sqrt{3} - i$ | $z_B = -\sqrt{3} - i$ | محور $[AE]$ |
|-------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------|

## تمرين 7

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، (وحدة الرسم 2cm). لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب:  $z_A = 2 + 2i$  و  $z_B = -1 + 3i$ .

ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته -3، وليكن الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ . نضع  $s = roh$ .

1- عيّن طبيعة التحويل s وعناصره المميزة.

- 2- بيّن أن صورة A بـ r هي C ذات اللاحقة  $z_C = -2$ .
- 3- لتكن G نقطة من المستوي تحقق:  $\vec{GA} + \vec{GB} = 3\vec{CB}$ .
- (أ) بيّن أن G هي مرجح الجملة  $\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$ ، ثم احسب  $z_G$  لاحقة النقطة G.

- (ب) عيّن وأنشئ المجموعة  $(E_1)$  للنقط  $M(z)$  من المستوي بحيث:  $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 2\|\vec{MG} - \vec{MC}\|$ .
- بيّن أن المجموعة  $(E_1)$  تشمل المبدأ O.

- (ج) عيّن وأنشئ المجموعة  $(E_2)$  للنقط  $M$  ( $M \neq G$  و  $M \neq A$ ) من المستوي بحيث:  $\arg(z - z_A) + \arg(\overline{z - z_G}) = \pi$ .

|                 |                       |                     |        |
|-----------------|-----------------------|---------------------|--------|
| $z_G = -1 - 2i$ | دائرة $(G; \sqrt{5})$ | $z' = 3iz + 4 - 6i$ | $JAG[$ |
|-----------------|-----------------------|---------------------|--------|